

Apoio 4 Álgebra Booleana

A chamada álgebra booleana foi proposta por George Boole no século XIX e manipula 2 valores: 0 e 1. Normalmente associa-se a idéia de FALSO ao valor 0 (zero) e VERDADEIRO ao valor 1 (um). A álgebra booleana é uma ferramenta básica para construção de sistemas lógicos e serve como base para a operação de circuitos computacionais. A álgebra booleana possui as seguintes propriedades:

1. **Operação E (AND, \wedge , \times , \cdot)**
 - Existe um elemento 0, tal que $a \vee 0 = a$ para qualquer a em A .
2. **Operação OU (OR, \vee , $+$)**
 - Existe um elemento 1, tal que $a \wedge 1 = a$ para qualquer a em A .
3. **Operação de complemento NEGAÇÃO (NOT, \neg , $'$, \sim)**
 - Para qualquer a em A existe um elemento $\neg a$ em A tal que:
 - $a \vee \neg a = 1$ e $a \wedge \neg a = 0$
4. **Distributiva:**
 - Para quaisquer a, b, c , tem-se que:
 - $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$
5. **Comutativa:**
 - Para quaisquer a, b , tem-se que:
 - $a \vee b = b \vee a$
 - $a \wedge b = b \wedge a$
6. **Ordem de precedência:**
 - Parênteses
 - \neg
 - \wedge
 - \vee

Tabelas verdades:

NOT	
0	1
1	0

AND	0	1
0	0	0
1	0	1

OR	0	1
0	0	1
1	1	1

Teoremas

	Teorema	Exemplo	Outro exemplo
T1	$A = A$	$1 = 1$	
T2	$\neg A = \neg A$	$\neg 1 = \neg 1$	
T3	$A \wedge A = A$	$0 \wedge 0 = 0$	
T4	$A \vee A = A$	$1 \vee 1 = 1$	
T5	$A \wedge 0 = A$	$1 \wedge 0 = 1$	
T6	$A \vee 1 = A$	$0 \vee 1 = 1$	
T7	$A \vee 0 = A$	$1 \vee 0 = 1$	
T8	$A \wedge 1 = A$	$1 \wedge 1 = 1$	
T9	$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$	$\neg(1 \wedge 1) = \neg 1 \vee \neg 1$	
T10	$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$	$\neg(0 \vee 1) = \neg 0 \wedge \neg 1$	
T11	$A \wedge A \vee B = A$	$1 \wedge 1 \vee 0 = 1$	
T12	$A \vee (A \wedge B) = A$	$1 \vee (1 \wedge 0) = 1$	
T13	$A \wedge \neg A \vee B = A \wedge B$	$0 \wedge \neg 0 \vee 1 = 0 \wedge 1$	
T14	$\neg A \vee (A \wedge \neg B) = \neg A \vee \neg B$	$\neg 1 \vee (1 \wedge \neg 0) = \neg 1 \vee \neg 0$	
T15	$A \vee B \wedge A \vee \neg B = A$	$1 \vee 0 \wedge 1 \vee \neg 0 = 1$	
T16	$(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) = \neg A$	$(\neg 0 \wedge \neg 1) \vee (\neg 0 \wedge 1) = \neg 1$	
T17	$A \wedge \neg A = 0$	$1 \wedge \neg 1 = 0$	
T18	$A \vee \neg A = 1$	$0 \vee \neg 0 = 1$	

Exercícios

1. Complete a tabela na página anterior com outros exemplos.
2. Considere as seguintes funções booleanas:

$$F1(A,B) = A \vee (A \wedge (A \wedge B))$$


$$F2(A,B) = (A \wedge \neg A \vee B) \wedge (A \vee (A \wedge B))$$

$$F3(A,B) = A \vee (A \wedge B) \vee \neg(A \vee (A \wedge B))$$

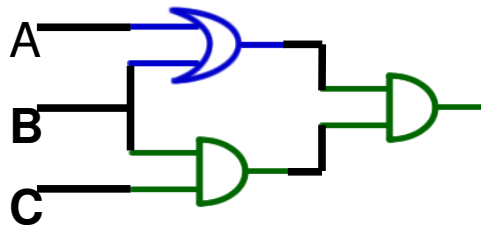
Qual o resultado (VERDADEIRO ou FALSO) destas funções considerando os seguintes valores de entrada:

- a) A = 0, B = 0
- b) A = 0, B = 1
- b) A = 1, B = 0
- b) A = 1, B = 1

3. Considere que os diagramas abaixo possuem o significado de AND e OR.

<i>AND</i>	<i>OR</i>
	

Qual o resultado obtido no circuito abaixo considerando: A = 0, B = 1, C = 0 ?



4. Considere as variáveis booleanas A, B e C apresentadas abaixo.

A = O Juventude ganhou do Grêmio. (V)

B = O Juventude vai disputar a semi-final do Gauchão. (V)

C = O Grêmio será campeão do Gauchão em 2008. (F)

As proposições que as representam são VERDADEIRAS ou FALSAS. Conforme os valores indicados, quais os resultados das seguintes operações (V ou F)?

- a) $F1(A,B) = A \wedge B$
- b) $F2(A,C) = A \vee C$
- c) $F3(A,B,C) = A \vee C \wedge \neg C$

5. Construa duas outras variáveis booleanas através de proposições e teste a aplicação destas com funções.